TITLE:

On unirationality of extremal elliptic surfaces

AUTHOR(S):

伊藤, 浩行

CITATION:

伊藤, 浩行. On unirationality of extremal elliptic surfaces. 代数幾何学シンポジューム記録 1995, 1995: 58-70

ISSUE DATE:

1995

URL:

http://hdl.handle.net/2433/214636

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

代数幾何学シンポジウム記録
1995年度 pp.58-70

On unirationality of extremal elliptic surfaces

東北大学大学院理学研究科数学専攻
伊藤 浩行 (Hiroyuki ITO)

December 1995

1 序

C 上の有理楕円曲面で Mordell-Weil 階数が 0 のものの分類と構成を Miranda-Persson が [7] で行ない、更に $K3$ 曲面の場合を [8] で行なった。それによると、$K3$ 曲面の場合は有理曲面に比べ非常に数が多くなり存在する可能性のあるファイバーの組み合わせ等をリストアップするだけでかなり大変である。

一方、W.Lang は [5]、[6] において同様の問題を正標数で考え、有理曲面について結果を得た。それによると、正標数では当然のことながら標数が 2、3 と 5 以上では全く異なり、標数が 5 以上の場合は本質的に **C** 上の場合と同じであるが、W.Lang は [5] において半安定の場合それらが楕円モジュラー曲面から構成されることを示した。

正標数で $K3$ 曲面の場合は私が [3] において行ったが (cf.§3、それによると **C** 上の場合とは全く異なりそのような曲面は殆ど存在しないことがわかった。主な理由は導手が曲面の幾何種数を上げても増えない、ということに起因する (cf.§2)。しかも、これらの曲面はどれも W.Lang のリストにある有理楕円曲面から純非分離基底拡大で得られている (cf.§3)。それでは一般にどうなるか、というのがこの講演の主題である。

以下、必要な定義を行う。

k を標数が 2、3 とは異なる代数閉体とし、$f: X \to C$ をセクション O を持つ k 上の楕円曲面とする。(ここで、$f: X \to C$ は相対的極小で、constant family ではないとする。)

$MW(X/C)$ で楕円曲面 $f: X \to C$ の Mordell-Weil 群を表す。即ち、$f: X \to C$ のセクション全体のなす群で、これは有限生成アーベル群となり $\mathbf{Z}^{\oplus r} \oplus (\text{torsion})$ と書き、r を Mordell-Weil 階数と呼ぶ。

また、$MW(X/C)'_{tor}$で、 Mordell-Weil 群の torsion 部分の p と素な部分を表す。

X の Néron-Severi 群を $NS(X)$ で表し、ρをその階数、T をその trivial 格子 (即ち、O、一般ファイバー F、各ファイバーの既約因子で O と交わらないもので生成される格子) とする。

このとき、次の事実は基本的である。

事実 1.1.

$$NS(X)/T \cong MW(X/C).$$

系 1.2 **(塩田- Tate の公式).**

$$\rho = r + 2 + \sum_{v \in C, f^{-1}(v):\text{degenerate}} (m_v - 1).$$

ただし、m_vは $f^{-1}(v)$ の既約因子の数。

以上の準備の元、extremal 楕円曲面とは次の通りである。

定義 1.1. $f : X \to C$ が extremal 楕円曲面であるとは、$r = 0$ かつρが極大であるときをいう。

ここで、ρが極大であるとは、次の通りである。一般に $\mathbf{C}$ 上の曲面について$\rho \le h^{1,1}$が成り立つが、この不等式の正標数での対応物である井草の不等式と呼ばれる不等式$\rho \le b_2 := \dim H^2_{\acute{e}t}(X, \mathbf{Q}_l), (l \ne p)$ が等号となるときを言う。($\mathbf{C}$ 上の場合は勿論$\rho = h^{1,1}$という条件である。)

また、正標数の曲面に対して、上の井草の不等式$\rho = b_2$が成り立つときを超特異曲面と呼ぶが、それに従うと、extremal 楕円曲面とは超特異楕円曲面で Mordell-Weil 階数が 0 であるものとも言える。

2 観察

ここで、extremal 楕円曲面が何故興味深いか、理由を 2、3 挙げておくことにする。

2.1 理由その 1

まず 楕円曲面に対する Ogg-Shafarevich の公式というものを挙げる。

事実 2.1 (Ogg-Shafarevich の公式).

$$\dim(\gamma(T_{\mathbf{Q}_l})^{\perp} \ in \ H^2_{\acute{e}t}(X, \mathbf{Q}_l)) = r + b_2 - \rho = 4g(C) - 4 + (\text{楕円ファイブレーションに関する導手})$$

ただし、$\gamma : NS(X)_{\mathbf{Q}_l} \to H^2_{\acute{e}t}(X, \mathbf{Q}_l)$ はサイクル写像。また、楕円ファイブレーションに関する導手は、準安定ファイバーの本数と加法的ファイバーの本数の 2 倍の和で表される。*(ただし、$p \ne 2, 3$ のとき。$p = 2, 3$ のときは Ogg [9] 参照。)*

この公式の系として次を得る。

系 2.2. 正標数の *extremal* 楕円曲面ならばファイブレーションの導手は 4 であり、基底曲線 C の種数は 0、即ち $C \cong \mathbf{P}^1$である。

($\because 0 = r + b_2 - \rho = 4g(C) - 4 +$ (導手).)

また、$\mathbf{C}$ 上の場合は次の系を得る。

系 2.3.

$$c_2(X)(= 12\chi(\mathcal{O}_X)) \le 6(2g(C) - 2 + (\text{導手})).$$

この系の式をじっと眺めると、下の曲線 C を固定したまま$\chi(\mathcal{O}_X)$ を大きくすると必然的に導手が大きくなる、即ち、ファイブレーションの退化が悪くなる。しかしながら、正標数の場合は少し状況が違ってくる。これを見るために、この系の正標数版である、所謂 Szpiro 予想の関数体版を挙げておく。

事実 2.4 (関数体版の Szpiro 予想). X_ηを $f : X \to C$ の生成ファイバーとするとき

$$\deg(\text{関数体 } k(C) \text{ 上の楕円曲線 } X_\eta \text{の判別式から決まる因子}) \le 6(2g(C) - 2 + (\text{導手}))p^e$$

ここで、p^eは $f : X \to C$ の純非分離次数で、C からモジュライへの写像を次の様に分解したときの純非分離な部分の次数$\deg\alpha$である。

$$\begin{array}{c} X \\ {\scriptstyle f}\downarrow \\ C \xrightarrow{\ \alpha\ } C' \xrightarrow{\ \beta\ } \mathcal{M}_1 \end{array}$$

(βは分離的、αは純非分離的な部分。)

これによると、$\mathbf{C}$ 上のときとは異なり、下の曲線 C と導手を固定しても純非分離次数を上げることにより、判別式因子(もしくは c_2と言っても、$\chi(\mathcal{O}_X)$ と言っても良い) を上げることができるであろうことがわかる。実は、extremal 楕円曲面はすべてこの様な状況からくることが、後の定理からわかる。

注意 *2.1.* Szpiro 予想は予想とは言っているが、勿論関数体の場合は簡単に証明でき、代数体上の場合が大変困難な予想となっている。代数体上の Szpiro 予想は "Fermat" をも導く。

2.2 理由その2 —— Hasse-Weil L 関数との関連 ——

今、与えられた楕円曲面 $f: X \to C$ が有限体 $\mathbf{F}_q$上定義されたものからきていたとする。即ち、代数曲面 X_0、代数曲線 C_0、$f: X_0 \to C_0$が $\mathbf{F}_q$ 上定義され、$f: X := X_0 \times_{\mathbf{F}_q} \bar{\mathbf{F}}_q \to C := C_0 \times_{\mathbf{F}_q} \bar{\mathbf{F}}_q$が楕円曲面であるとする。また、$L(E_0/K_0, s)$ を有限体上の楕円曲面 $f: X_0 \to C_0$の Hasse-Weil L 関数とする。ただし E_0は有限体上の楕円曲面 $f: X_0 \to C_0$の生成ファイバーを、K_0は C_0の関数体 $\mathbf{F}_q(C_0)$ の表す。

定義 2.1.

$$L(E_0/K_0, s) := \prod_{v \in C_0,\ \text{閉点}} \frac{1}{P_v(s)}$$

ここで、

$$P_v(s) := \begin{cases} 1 - (q_v + 1 - N_v)q_v^{-s} + q_v^{1-2s} & f^{-1}(v) \text{ が非特異} \\ 1 - \epsilon_v q_v^{-s} & f^{-1}(v) \text{ が半安定} \\ 1 & f^{-1}(v) \text{ が加法的} \end{cases}$$

であり、$\mathbf{F}_v$を v での剰余体とするとき q_vで $\mathbf{F}_v$の位数、N_vで $X_0 \mod v$ での $\mathbf{F}_v$有理点の個数を表し、ϵ_vはノードでの接線が $\mathbf{F}_v$有理的かどうかで± 1 をとる。

さて、extremal 楕円曲面 $f: X \to C$ が有限体 $\mathbf{F}_q$上定義された曲面 X_0からきていたとすると、extremal ということの L 関数による特徴付けが与えられる。

命題 2.5 (塩田 [15]). *楕円曲面 $f: X \to C$ が有限体上の楕円曲面 $f: X_0 \to C_0$からきていたとき、X が extremal になるための必要十分条件は、$f: X_0 \to C_0$の Hasse-Weil L 関数が自明 (即ち、$L(E_0/K_0, s) = 1$) となることである。*

2.3 理由その3 —— 楕円モジュラー曲面との関連 ——

$\mathbf{C}$ 上の場合は次の定理があるが、必ずしも extremal 楕円曲面が楕円モジュラー曲面であるというわけではない。(有理曲面の場合は楕円モジュラー曲面であるが、$K3$ 曲面のときそうでは無い。cf.[8] 及び §5 参照。)

定理 2.6 (塩田 [11]). Γを $SL(2, \mathbf{Z})$ の合同部分群で$-1 \notin \Gamma$であるものとし、$C := \Gamma \backslash \mathcal{H}^*$をモジュラー曲線、$X/C$ を楕円モジュラー曲面とする。このとき、$MW(X/C)$ は有限群である。

一方、正標数の場合は状況が異り、次の塩田の例からもわかる通り楕円モジュラー曲面であっても Mordell-Weil 階数が正である場合が起こる。

例 (塩田 [13]) $f: X \to \mathbf{P}^1$をレベル 4 の楕円モジュラー曲面とすると

$$\rho(X) = \begin{cases} 20 & (p = 0 \text{ または } p \equiv 1 \pmod 4) \\ 22 & (p \equiv 3 \pmod 4) \end{cases}$$

$$MW(X/\mathbf{P}^1) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} & (p = 0 \text{ または } p \equiv 1 \pmod 4) \\ \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} & (p \equiv 3 \pmod 4) \end{cases}$$

が成り立つ。

しかし、後に見るように 正標数の extremal 楕円曲面は本質的に楕円モジュラー曲面だけであることがわかる。

3 例

extremal 楕円曲面が特に有理曲面、$K3$ 曲面の場合を中心に例を挙げる。

3.1 有理楕円曲面

$\mathbf{C}$ 上の場合は Miranda-Persson (cf. [7]) によって、正標数の場合は (標数が 2、3 の場合を含めて) W.Lang (cf. [5],[6]) によって分類されている。

定理 3.1 (W.Lang,Miranda-Persson). *k の標数が 2、3 とは異なるとし $f : X \to \mathbf{P}^1$ を k 上の extremal 楕円曲面とする。*

(1) f が半安定のとき、その退化ファイバーは $(\mathrm{I}_a, \mathrm{I}_b, \mathrm{I}_c, \mathrm{I}_d)(a, b, c, d > 0)$ となるが、この様な組 (a, b, c, d) が存在するための必要十分条件は

$$\begin{cases} a + b + c + d = 12 \\ abcd \text{ は完全平方数} \\ p \text{ は } abcd \text{ を割らない} \end{cases}$$

である。これを表にすると

タイプ	deg J	$MW(X/C)$	$\exists/\mathbf{C}$	$\exists$ in $p > 3$	X
$(\mathrm{I}_9, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_1)$	12	$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$	$\exists$	$\exists$	$X \xrightarrow{3} E_1(3)$
$(\mathrm{I}_8, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_1)$	12	$\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$	$\exists$	$\exists$	$X \xrightarrow{2} E_1(4)$
$(\mathrm{I}_5, \mathrm{I}_5, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_1)$	12	$\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$	$\exists$	$\exists$ in $p > 5$	$E_1(5)$
$(\mathrm{I}_6, \mathrm{I}_3, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_1)$	12	$\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$	$\exists$	$\exists$	$E_1(6)$
$(\mathrm{I}_4, \mathrm{I}_4, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_2)$	12	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$	$\exists$	$\exists$	$E_2(4)$
$(\mathrm{I}_3, \mathrm{I}_3, \mathrm{I}_3, \mathrm{I}_3)$	12	$(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^{\oplus 2}$	$\exists$	$\exists$	$E_3(3)$

となる。

(2) f が半安定ではなくモジュライ写像 (J 関数) の次数が 0 ではない場合は次の表の通り。

タイプ	$\deg J$	$MW(X/C)$	$\exists/\mathbf{C}$	$\exists$ *in* $p>3$	X
$(\mathrm{I}_1^*, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_4)$	*6*	$\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$	$\exists$	$\exists$	$E_1(4)$
$(\mathrm{I}_2^*, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_2)$	*6*	$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$	$\exists$	$\exists$	$y^2 = x(x-1)(x-t)$
$(\mathrm{I}_4^*, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_1)$	*6*	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\exists$	$\exists$	$y^2 = x^3 - 3(t^2-3)x + t(2t^2-9)$
$(\mathrm{IV}^*, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_3)$	*4*	$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$	$\exists$	$\exists$	$E_1(3)$
$(\mathrm{III}^*, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2)$	*3*	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\exists$	$\exists$	$y^2 = x^3 - tx + t - 1$
$(\mathrm{II}^*, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_1)$	*2*	$\{0\}$	$\exists$	$\exists$	$y^2 = x^3 + x + t$
$(\mathrm{II}, \mathrm{I}_5, \mathrm{I}_5)$	*10*	$\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$	$\nexists$	$\exists$ *in* $p=5$	$y^2 = x^3 + x + t^5$
				$\nexists$ *in* $p \neq 5$	

(3) モジュライ写像の次数が 0 のときは次の 4 通り。

タイプ	J 写像	$MW(X/C)$	X
$(\mathrm{II}, \mathrm{II}^*)$	$J \equiv 0$	$\{0\}$	$y^2 = x^3 + t^5$
$(\mathrm{III}, \mathrm{III}^*)$	$J \equiv 1$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$y^2 = x^3 + t^3 x$
$(\mathrm{IV}, \mathrm{IV}^*)$	$J \equiv 0$	$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$	$y^2 = x^3 + t^4$
$(\mathrm{I}_0^*, \mathrm{I}_0^*)$	$J \equiv j \in \mathbf{P}_k^1$	$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\oplus 2}$	$y^2 = x^3 + t^2 x + at^3 (j = 4/4 + 27a^2 \in \mathbf{P}_k^1)$

(4) 上で存在するものは一意的である。

3.2 超特異 $K3$ 曲面

次に正標数の $K3$ 曲面について見てみる。この場合超特異 $K3$ 曲面となり、それ自体非常に興味深い対象であるがここではあまり深くは立ち入らない。

定理 3.2. *(伊藤 [3])* $f: X \to \mathbf{P}^1$ を超特異楕円 $K3$ 曲面とするとファイバーの組み合わせは次の何れかとなり、各組み合わせに対して同型を除いて一意的に楕円曲面が定まる。ただし、ここで基礎体 k の標数は 5 以上とする。

タイプ	$\deg J$	$MW(X/C)$	$\exists$ in $p>3$	X
$(\mathrm{II}, \mathrm{I}_{11}, \mathrm{I}_{11})$	22	$\{0\}$	$\exists$ in $p=11$	$y^2 = x^3 - 3t^8 x + 2t$
$(\mathrm{III}, \mathrm{I}_7, \mathrm{I}_{14})$	21	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\exists$ in $p=7$	$y^2 = x^3 - t^7 x + t^7 - 1)$
$(\mathrm{II}^*, \mathrm{I}_7, \mathrm{I}_7)$	14	$\{0\}$	$\exists$ in $p=7$	$y^2 = x^3 - 3t^8 x + 2t^5$
$(\mathrm{IV}, \mathrm{I}_5, \mathrm{I}_{15})$	20	$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$	$\exists$ in $p=5$	$y^2 = x^3 + t^3(3t^5-1)x + t^2(1+3t^5-t^{10})$
$(\mathrm{III}^*, \mathrm{I}_5, \mathrm{I}_{10})$	15	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$\exists$ in $p=5$	$y^2 = x^3 - t^3 x + t^7(1-t^5)$

注意 *3.1.* Artin 不変量 (cf. [1]) を計算することにより (すべて 1 となり) これらの曲面はすべて Kummer 曲面であることがわかる。(cf. [10])

従って、上野 [16] の結果 (正標数の Kummer 曲面の自己同型群に関する結果) を用いることにより次の系を得る。

系 3.3. k を標数が 5 以上の体とし X を k 上の超特異楕円 $K3$ 曲面とするとき、X の自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ には無限位数の元 σ で、楕円ファイブレーション構造を保ち、$H^0(X, \Omega_X^2)$ に自明に作用するものがある。特に、X は無限個の $\mathbf{P}^1$ を含む。

$p=3$ についての結果もあるが省略する。(cf. [3])

さて、上に挙げた extremal 楕円 $K3$ 曲面のリストを見るとどれも extremal 有理楕円曲面の純非分離基底拡大で得られることが観察される。

実際、$(\mathrm{II}, \mathrm{I}_{11}, \mathrm{I}_{11})$、$(\mathrm{II}^*, \mathrm{I}_7, \mathrm{I}_7)$ は extremal 有理楕円曲面 $(\mathrm{II}^*, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_1)$ から、それぞれ標数 11、7 のフロベニウス基底拡大で、$(\mathrm{III}, \mathrm{I}_7, \mathrm{I}_{14})$、$(\mathrm{III}^*, \mathrm{I}_5, \mathrm{I}_{10})$ は $(\mathrm{III}^*, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2)$ から、それぞれ標数 7、5 のフロベニウス基底拡大で、$(\mathrm{IV}, \mathrm{I}_5, \mathrm{I}_{15})$ は $(\mathrm{IV}^*, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_3)$ から標数 5 のフロベニウス基底拡大で得られる。

3.3 その他の例

次の例は塩田による。

標数 $p \geq 5$ の体 k 上の有理関数体 $k(t)$ 上の楕円曲線が次の Weierstrass 方程式で与えられているとし、

$$y^2 = x^3 + x + t^q, \quad q = p^e$$

$f: X \to \mathbf{P}^1$ をその Néron モデルとすると楕円曲面となるが、$q \leq 6$ のとき有理曲面となり、$q > 6$ のとき非有理な単有理曲面となる。従って特に超特異曲面となり、更に、Mordell-Weil 群が自明となるので extremal 楕円曲面となる。この曲面の退化ファイバーは

$$(\mathrm{I}_q, \mathrm{I}_q, \mathrm{II}^*) \text{ when } q \equiv 1 \pmod 6$$
$$(\mathrm{I}_q, \mathrm{I}_q, \mathrm{II}) \text{ when } q \equiv 5 \pmod 6$$

であり、Néron-Severi 群は

$$NS(X) \cong \mathrm{A}_{q-1}^{\oplus 2} \oplus \begin{cases} \mathrm{E}_8 & \text{when } q \equiv 1 \pmod 6 \\ 0 & \text{when } q \equiv 5 \pmod 6 \end{cases}$$

となる。また、$\chi(\mathcal{O}_X) = [\frac{q}{6}] + 1$ となる。

この曲面についても、extremal 有理楕円曲面でファイバータイプが $(\mathrm{II}^*, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_1)$ であるものから純非分離基底拡大で得られることが容易に確かめられる。有理楕円曲面でファイバータイプが $(\mathrm{II}^*, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_1)$ であるものは、生成ファイバーの Weierstrass 方程式が $y^2 = x^3 + x + t$ で与えられる。(3.1 参照)

3.4 問題

さて、以上の観察から自然に次の問題が提起される。

問題 1. すべての *extremal* 楕円曲面は、有理楕円曲面で *extremal* なものからの純非分離基底拡大で得られるか？

更に、

問題 2. *extremal* 楕円曲面は単有理か？

問題 2 は次の一般的な予想の特別な場合である。

予想 1. 正標数の単連結な *(*即ち、次数が 1 以上の連結な *étale* 被覆を持たない*)* 曲面に対しては、単有理であることと超特異であることが同値である *(cf.[14])*。

一般に単有理ならば超特異であるが、逆は $K3$ 曲面のときでさえも証明されていない。Kummer 曲面については正しいことが証明されている (cf. 塩田 [14])。

4 主結果とその証明

前節の問題に対する答えが主定理である。

定理 4.1. 基礎体の標数を 5 以上とすると、*extremal* 楕円曲面でモジュライ写像 (*J* 関数) の次数が 0 でないものはすべて *extremal* 有理楕円曲面からの純非分離基底拡大によって得られる。また、*extremal* 楕円曲面でモジュライ写像 (*J* 関数) の次数が 0 のものは有理楕円曲面である。

特に、

系 4.2. 標数が 5 以上の *extremal* 楕円曲面は単有理である。

4.1 準備

定理の証明の為、モジュライ写像 (J 関数) の定義といくつか補題を用意する。

定義 4.1. $f : X \to C$ を楕円曲面とするとき、C から $M_1 \cong \mathbf{P}^1$への写像 J を $v \in C$ に対して $J(v) :=$ ファイバー $f^{-1}(v)$ の通常の J 関数と定義する。

楕円曲面の生成ファイバーを Weierstrass 形式で、$y^2 = x^3 + Ax + B$ と書いたときは $J = A^3/4A^3 + 27B^2$ となる。

補題 4.3. $f : X \to \mathbf{P}^1$を *extremal* 楕円曲面とし$\deg J \neq 0$とするとき、J 関数が $\mathbf{P}^1$から $\mathbf{P}^1$への写像として分離的ならば X は有理曲面である。

この補題は次の補題から従う。

補題 4.4. $f : X \to \mathbf{P}^1$を *extremal* 楕円曲面とし$\deg J \neq 0$とし J 関数が分離的とする。このとき次が成り立つ。

$$\deg J \leq 6\sum_{n\geq 1}(\nu(\mathrm{I}_n) + \nu(\mathrm{I}_n^*)) + 4(\nu(\mathrm{II}) + \nu(\mathrm{IV}^*)) + 3(\nu(\mathrm{III}) + \nu(\mathrm{III}^*)) + 2(\nu(\mathrm{II}^*) + \nu(\mathrm{IV})) + 12g(C) - 12$$

ただし、$\nu(\text{type})$ でタイプが type のファイバーの本数を表す。

証明: J 関数に Riemann-Hurwitz の公式を用いる。

$$2g(C) - 2 = -2\deg J + \sum_{v\in C}(mult_v(J) - 1)$$

ここで、$mult_v(J)$ は J 関数の v での重複度である。即ち、t を v での局所変数としたときの$\mathrm{ord}_v(J(t) - J(0))$ である。また、

$$\sum_{v\in C}(mult_v(J) - 1) \geq \sum_{J(v)=0,1,\infty} mult_v(J) - |J^{-1}(0)| - |J^{-1}(1)| - |J^{-1}(\infty)|$$

であり、$J^{-1}(*)$ の被約因子としての次数 $|J^{-1}(*)|$ を退化ファイバーの各タイプの本数で評価することにより求める式が得られる。(詳しくは [7] を参照。) □

注意 *4.1.* 上の補題 4.4 において J 関数が分離的という仮定を取り除いても次の意味で成り立つ。

J 関数を純非分離部分 $J_{insep}: C \cong \mathbf{P}^1 \to C'$と分離部分 $J_{sep}: C' \to M_1 \cong \mathbf{P}^1$に分解する。即ち、$J = J_{sep} \circ J_{insep}$。このとき

$$\deg J_{sep} \leq 6\sum_{n\geq 1}(\nu(\mathrm{I}_n)+\nu(\mathrm{I}_n^*)+4(\nu(\mathrm{II})+\nu(\mathrm{IV}^*))+3(\nu(\mathrm{III})+\nu(\mathrm{III}^*))+2(\nu(\mathrm{II}^*)+\nu(\mathrm{IV}))+12g(C')-12$$

が成り立つ。(ただし、$\nu(\mathrm{type})$ は $f: X \to C$ のファイバーについて考える。)

4.2 楕円モジュラー曲面

証明の基本的な方針は $f: X \to C \cong \mathbf{P}^1$を与えられた extremal 楕円曲面、$J: C \to \mathbf{P}^1$を J 関数とし、J を J_{sep}と J_{insep}に分解したときに、C'上に何か楕円曲線の族があり、それの J_{insep}による引き戻しであることを言いたいが、C'上に楕円曲線の族が存在するかどうかはわからない。(この様な族が存在することがわかれば、補題 4.3 よりそれは有理曲面となることが従う。)

その様な楕円曲線の族の存在を示す為にレベル (n,m) 構造付きの楕円曲線のモジュライ問題を導入する。

定義 4.2. n, m を正の整数で、$m|n$ かつ $p \nmid n$ とする。n がその上で可逆であるようなスキームを S とし、E を S 上の楕円曲線とする。このときレベル (n,m) 構造とは $S-$埋め込み写像

$$\alpha: (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/m\mathbf{Z})_S \to E/S$$

で、$\mathrm{Im}\alpha$が楕円曲線 E/S のすべての絶対ファイバーのすべての既約因子と交わるもののことである。また、レベル (n,m) 構造αとβが同値であるとは$\eta: (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/m\mathbf{Z})_S \to (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/m\mathbf{Z})_S$があって図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \arrow[rr, "\exists\eta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \arrow[dl, "\beta"] \\
& E &
\end{tikzcd}$$

を可換にするときを言う。

定義 4.3. レベル (n,m) 構造付きのモジュライ問題とはスキームのカテゴリー $(Schemes)$ から集合のカテゴリー $(Sets)$ への反変関手 $\mathcal{M}^\circ: (Schemes) \to (Sets)$

$$\mathcal{M}^\circ(S) := \{\text{ レベル } (n,m) \text{ 構造}\alpha\text{の同値類 }\}$$

のことである。

上の定義で S 上の楕円曲線 E というところを S 上の一般化された楕円曲線 (generalized elliptic curve)E と、取り換えて得られるモジュライ問題を $\mathcal{M}$ と書く。(これは $\mathcal{M}^0$のコンパクト化となっている。)

このとき Cox-Parry による基本的な結果は次の通りである。

定理 4.5 (Cox-Parry [2]). *(1)* M^0(または M) を $\mathcal{M}^0$(または $\mathcal{M}$)のモジュライスキームとすると、M は非特異絶対連結な曲線で種数は k の標数にはよらない。また M^0は M のコンパクト化で、特に $\mathbf{C}$ 上の場合、

$$M \cong \Gamma_m(n)\backslash\mathcal{H}^*$$

と書ける。ただし、

$$\Gamma_m(n) := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{Z}) | \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{n}, b \equiv 0 \pmod{m}\}$$

である。

(2) $g(X_m(n)) = 0$ であるのは次の 19 通り。

$$(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(7,1),(8,1),(9,1),(10,1),(12,1)$$

$$(2,2),(4,2),(6,2),(8,2),(3,3),(6,3),(4,4),(5,5)$$

(3) $(n,m) \neq (1,1),(2,1),(2,2)$ ならばモジュライ問題 $\mathcal{M}$ は良いモジュライ (*fine moduli*) である。*(* $(n,m) = (3,1),(4,1)$ の場合は少し修正する必要がある。*)*

詳しくいうと、$X_m(n) := M \times_{\mathbf{Z}} k$*(*または $X_m(n)^0 := M^0 \times_{\mathbf{Z}} k$*)* は $\mathcal{M} \times_{\mathbf{Z}} k$*(*または $\mathcal{M}^0 \times_{\mathbf{Z}} k$*)* を表現し、$(n,m) \neq (1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(4,1)$ ならば $X_m(n)$*(*または $X_m(n)^0$*)* 上の普遍レベル (n,m) 構造を持った楕円曲線 $E_m(n)$*(*または $E_m(n)^0$*)* が存在し、$MW(E_m(n)/X_m(n))'_{tor} \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ で $E_m(n)/X_m(n)$ は $E_m(n)^0/X_m(n)^0$の *Néron* モデルとなり、$E_m(n)/X_m(n)$ は楕円モジュラー曲面となる。*(* $(n,m) = (3,1),(4,1)$ の場合については省略。少くとも $\mathcal{M}^0$は良いモジュライとなる。*)*

4.3 証明

p を基礎体 k の標数 $(p \geq 5)$、(n,m) を正の整数の組で $m|n$ かつ $p \nmid n$ を満たすものとする。

定理 4.6. $(n,m) \neq (1,1),(2,1),(2,2)$ とし、$f: X \to \mathbf{P}^1$を *extremal* 楕円曲面で *Mordell-Weil* 群の標数と素な部分が $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ に同型なものとする。このとき、$f: X \to \mathbf{P}^1$は *extremal* 有理楕円曲面から純非分離基底拡大、及び特異点解消によって得られる。

証明: $f: X \to \mathbf{P}^1$の Mordell-Weil 群の p と素な部分が $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ と同型なのでレベル (n,m) 構造が入るように退化ファイバーの因子 ((-2) 曲線) を適当に blow-down して $f: X' \to \mathbf{P}^1$を得る。ここで Cox-Parry によるレベル (n,m) 構造のモジュライ問題から $\mathcal{M}_1 \cong \mathbf{P}^1$上に普遍レベル (n,m) 構造が入った普遍楕円曲線 $\mathcal{E} \to \mathcal{M}_1 \cong \mathbf{P}^1$が存在し、$f: X' \to \mathbf{P}^1$はその基底拡大で得られる。

ここで、前にも説明したように、まずモジュライ写像 $J: \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$を純非分離部分 J_{insep}と分離部分 J_{sep}とに分け、普遍楕円曲線 $\mathcal{E}/\mathbf{P}^1$を J_{sep}で引き戻して $Y \to \mathbf{P}^1$ができるが、この曲面 Y は補題 4.3 より有理曲面であることがわかる。

以上の構成より、$f: X \to \mathbf{P}^1$は有理楕円曲面 $Y \to \mathbf{P}^1$から J_{insep} による純非分離基底拡大をした後非特異化して得られることがわかる。

(レベルが $(3,1),(4,1)$ の場合はもう少し考察が必要だがここでは省略する。) □

さて、レベルが $(1,1),(2,1),(2,2)$ の場合は具体的に計算する必要があり、次の定理を得る。

定理 4.7. $f: X \to \mathbf{P}^1$を *extremal* 楕円曲面で$\deg \neq 0$ とし、$MW(X/\mathbf{P}^1)' \cong \{0\}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ または $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}^2$とすると、この様な楕円曲面は有理楕円曲面でファイバーのタイプがそれぞれ $(\mathrm{II}^*, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_1), (\mathrm{III}^*, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_1)$ または $(\mathrm{I}_2^*, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_2)$ で *Mordell-Weil* 群がそれぞれ $\{0\}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ または $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}^2$となるものから純非分離基底拡大で得られる。

更に、$f: X \to \mathbf{P}^1$の退化ファイバーのタイプはそれぞれ

$$\begin{cases} (\mathrm{II}^*, \mathrm{I}_{p^e}, \mathrm{I}_{p^e}) & (p^e \equiv 1 \pmod{6} \text{ のとき}) \\ (\mathrm{II}, \mathrm{I}_{p^e}, \mathrm{I}_{p^e}) & (p^e \equiv 5 \pmod{6} \text{ のとき}) \end{cases},$$

$$\begin{cases}(\mathrm{III}^*, \mathrm{I}_{2p^e}, \mathrm{I}_{p^e}) & (p^e \equiv 1 \pmod 4 \text{ のとき}) \\ (\mathrm{III}, \mathrm{I}_{2p^e}, \mathrm{I}_{p^e}) & (p^e \equiv 3 \pmod 4 \text{ のとき})\end{cases}$$

または

$$(\mathrm{I}^*_{2p^e}, \mathrm{I}_{2p^e}, \mathrm{I}_{2p^e})$$

となる。

証明: 簡単の為レベルが $(1,1)$ の場合のみ証明する。

(1) $f : X \to \mathbf{P}^1$が半安定である場合。

導手が4以下なので退化ファイバーが $(\mathrm{I}_\alpha, \mathrm{I}_\beta, \mathrm{I}_\gamma, \mathrm{I}_\delta)(\alpha \le \beta \le \gamma \le \delta)$ であるとする。事実1.1より $\det NS(X) = \det T/|MW(X/\mathbf{P}^1)|^2 = -\alpha\beta\gamma\delta$ であるが、X が超特異であるのでこれは p の偶数巾$-p^{2\sigma_0}(\sigma_0 \ge 0)$ である。従って、退化ファイバーを $(\mathrm{I}_{p^a}, \mathrm{I}_{p^{a+b}}, \mathrm{I}_{p^{a+c}}, \mathrm{I}_{p^{a+d}})(a, b, c, d \ge 0, b + c + d \equiv 0 \pmod 2)$ とすると

$$\deg J = p^a(1 + p^b + p^c + p^d), \deg J_{sep} = 1 + p^b + p^c + p^d$$

となるが $(1 + p^b + p^c + p^d \not\equiv 0 \pmod p$ に注意)、補題4.4より

$$1 + p^b + p^c + p^d \le 24 - 12 = 12$$

これと $b + c + d \equiv 0 \pmod 2$ より $(p^b, p^c, p^d) = (1,1,1), (1,5,5)(\text{in } p = 5)$ を得るが Riemann-Hurwitz から $(1,5,5)$ は不適、$(1,1,1,1)$ は $12 | \deg J(\because$ 半安定) に矛盾。

(2) $f : X \to \mathbf{P}^1$が半安定ではない場合。

導手が4より退化ファイバーのタイプは加法的ファイバーが1本と半安定ファイバーが2本であるが、$\det T = \det NS(X) = -p^{2\sigma_0}$ より加法的ファイバーはII型かII*型である。(1)と同様の理由により半安定ファイバーを $\mathrm{I}_{p^a}, \mathrm{I}_{p^{a+b}}$ とでき、このとき $J_{sep} = 1 + p^b (\not\equiv 0 \pmod p)$ で補題4.4を適用して

$$1 + p^b = \deg J_{sep} \le \begin{cases} 4 & (\text{加法的ファイバーが II のとき}) \\ 2 & (\text{加法的ファイバーが II}^* \text{のとき}) \end{cases}$$

となり、$b = 0$ 即ち退化ファイバーが $(\mathrm{II}, \mathrm{I}_{p^a}, \mathrm{I}_{p^a})$ か又は $(\mathrm{II}^*, \mathrm{I}_{p^a}, \mathrm{I}_{p^a})$ となり

$$c_2(X) = 12\chi(\mathcal{O}_X) = b_2(X) + 2 = \rho + 2 = 2 + 2(p^a - 1) + 2 + \begin{cases} 0 & (\text{加法的ファイバーが II のとき}) \\ 8 & (\text{加法的ファイバーが II}^* \text{のとき}) \end{cases}$$

従って

$$2p^a + \begin{cases} 2 & (\text{加法的ファイバーが II のとき}) \\ 10 & (\text{加法的ファイバーが II}^* \text{のとき}) \end{cases} \equiv 0 \pmod{12}$$

$$\therefore p^a \equiv \begin{cases} 1 & (\text{加法的ファイバーが II のとき}) \\ 5 & (\text{加法的ファイバーが II}^* \text{のとき}) \end{cases} \pmod 6$$

一方、有理楕円曲面でファイバータイプが $(\mathrm{II}^*, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_1)$ のものを次数が p^a の純非分離写像で基底拡大し、非特異化した楕円曲面のファイバータイプは加法的ファイバーが

$$\begin{cases} \mathrm{II} & (p^a \equiv 5 \pmod 6) \\ \mathrm{II}^* & (p^a \equiv 1 \pmod 6) \end{cases}$$

で、半安定ファイバーが 2 本の I_{p^a} となり定理の結果を得る。一意性は $\mathrm{Aut}(\mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_q}) = PGL(2,q)$ の 3 可移性から得られる。

退化ファイバーが 2 本の加法的ファイバーのときは、退化ファイバーの組み合わせは $(\mathrm{II},\mathrm{II}^*)$ で $\deg J = 0$ となり有理楕円曲面の分類 (3.1) より一意的に存在し有理曲面となる。

$MW(X/\mathbf{P}^1)' \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\oplus 2}$ についても同様の計算を行う。 □

$\deg J = 0$ の場合は有理曲面となり定理 3.1 の分類の通りである。

以上により、定理 4.1 を得る。また、extremal 楕円曲面は有理曲面からの純非分離基底拡大で得られることから系 4.2 を得る。

系を言い換えれば、楕円曲面で Mordell-Weil 階数が 0 ならば予想 1 が正しいということになる。

5 考察

前節で証明した定理から、標数が 5 以上の extremal 楕円曲面はすべて分類されたが、それによると Mordell-Weil 群の torsion 部分群で標数と素な部分には位数が 2、3、5 の元しか現れない。従って、例えば次のような系を得る。

系 5.1. *$E/k(\mathbf{P}^1)$ を超特異楕円曲面の生成ファイバーである関数体上の楕円曲線とし、l を $p,2,3,5$ とは異なる素数とするとき E に有理点で位数が l のものがあると Mordell-Weil 階数は正である。*

もっとも、Mordell-Weil 階数が高くなればなる程、位数の大きいトーション元が存在しなくなるので、逆に言うと上の系は超特異楕円曲面の Mordell-Weil 群は殆ど正であるということを言っているとも思える。

最後に Cox-Parry の定理 4.5 の (2) にあるリストを $\deg J$ に従って並べ直してみると表のようになる。

<table>
<tr><td>$(1,1),(2,1)$
$(2,2)$</td><td>$(3,1),(4,1)$</td><td>$(5,1),(6,1)$
$(4,2)$
$(3,3)$</td><td>$(7,1),(8,1)$
$(6,2)$
$(4,4)$</td><td>$(9,1),(10,1)$
$(6,3)$</td><td>$(8,2)$</td><td>$(12,1)$
$(5,5)$</td></tr>
<tr><td>$\mathcal{M}^0$:not fine moduli</td><td colspan="6">$\mathcal{M}^0$:fine moduli</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathcal{M}$:not fine moduli</td><td colspan="5">$\mathcal{M}$:fine moduli</td></tr>
<tr><td colspan="3">有理曲面 $(\chi = 1, p_g = 0)$</td><td>$K3$ 曲面
$(\chi = 2, p_g = 1)$</td><td>$\chi = 3, p_g = 2$</td><td>$\chi = 4, p_g = 3$</td><td>$\chi = 5, p_g = 4$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$0 \le \deg J < 12$</td><td>$\deg J = 12$</td><td>$\deg J = 24$</td><td>$\deg J = 36$</td><td>$\deg J = 48$</td><td>$\deg J = 60$</td></tr>
<tr><td colspan="2">半安定ではない</td><td colspan="5">半安定</td></tr>
<tr><td colspan="2">$2 \le$特異ファイバーの数< 4</td><td>4 本</td><td>6 本</td><td>8 本</td><td>10 本</td><td>12 本</td></tr>
<tr><td colspan="3">導手$= 4$</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td></tr>
<tr><td colspan="3">extremal</td><td colspan="4">not extremal, i.e.,not supersingular or rk $MW > 0$</td></tr>
</table>

問題 3. *表でレベルが $(7,1),(8,1),(6,2)$ の場合も §3 で見た、レベル 4 の場合 (ここでのレベル $(4,4)$ にあたる) と同様な現象が起きているであろうか。(即ち、標数によって、超特異的になり、Mordell-Weil 階数が 2 になる場合と、Picard 数が 20 で Mordell-Weil 階数が 0 になる場合があるか。)*

更に表から

問題 4. 問題 *3* と同様な現象が更に高いレベル構造において起きるか？例えば、レベル $(9,1),(10,1),(6,3)$ は退化ファイバーの数が 8 本で $\chi(\mathcal{O}_X)=3, p_g(X)=2, b_2(X)=34, \rho(X)\leq 30(?)$ である。また、レベル $(5,5)$ は退化ファイバーが 12 本の I_5 型ファイバーであり、

$$\chi(\mathcal{O}_X)=5, p_g(X)=4, b_2(X)=60, \rho(X)\leq 50=\mathrm{rk}\,T$$

となるので、標数によって超特異で *Mordell-Weil* 階数が 10 になったり、*Mordell-Weil* 階数が 0 で $\rho=50$ となったり、その中間の値をとったりするのかどうか？

問題 5. またこれらと関連して、各値 $\chi(\mathcal{O}_X)$ に対してとり得ない *Picard* 数の値があるのか？*(例えば、楕円 $K3$ 曲面に対しては* **C** *上では $\rho=19$ というのは存在せず、正標数の閉体上では $\rho=21$ というのは存在しない。)*

問題 6. 標数が 2 と 3 のときに問題 *1*、問題 *2* を考察せよ。

Cox-Parry の結果は Deligne-Rapoport を用いているため、標数が 2 と 3 では使えない。また、Lang [5]、[6] により有理曲面の場合の分類を見てもわかるが、標数が 5 以上とは非常に異なる (特に [6]) ので一見すると有理曲面から基底変換で得られるもの以外もありそうである。(これは主に、導手に野生的分岐を計る不変量がはいってくるためである。cf.[9])

参考文献

[1] M. Artin, Supersingular K3 surfaces, Ann. scient. École Norm. Sup. 4^e Ser. **7**, pp. 543-568 (1974).

[2] D. Cox and W. Parry, TORSION IN ELLIPTIC CURVES OVER $k(t)$, Composit. Math., Vol **41**, pp. 337-354 (1980)

[3] H. Ito, Automorphism of supersingular K3 surfaces, preprint.

[4] H. Ito, On unirationality of extremal elliptic surfaces, preprint.

[5] W. Lang, Extremal rational elliptic surfaces in characteristic p, Math. Z. **207**, pp. 429-438 (1991).

[6] W. Lang, Extremal rational elliptic surfaces in characteristic p. II:Surfaces with three or fewer singular fibres, Ark. Mat. **32**, pp. 423-448 (1994).

[7] R. Miranda and U. Persson, On extremal rational elliptic surfaces, Math. Z. **193**, pp. 537-558 (1986).

[8] R. Miranda and U. Persson, Configurations of I_n Fibers on Elliptic K3 Surfaces, Math. Z. **201**, pp. 339-361 (1989).

[9] A. Ogg, Elliptic curves and wild ramification, Amer. J. Math. **89**, pp. 1-21 (1967).

[10] A. Ogus, Supersingular $K3$ crystals, Journees de Geometrie Algebrique de Rennes (Rennes, 1978) Asterisque, **64**, pp. 3–86 (1979).

[11] T. Shioda, On elliptic modular surfaces, J. Math. Soc. Japan. **24** pp. 20-59 (1972).

[12] T. Shioda, On rational points of the generic elliptic curve with level N structure over the field of modular functions of level N, J. Math. Soc. Japan. **25** pp. 144-157 (1973)

[13] T. Shioda, Algebraic Cycles on Certain K3 Surfaces in Characteristic p, Manifolds–Tokyo 73 (Proc. Internat. Conf., Tokyo) pp. 357-364 (1973)

[14] T. Shioda, Some Results on Unirationality of Algebraic Surfaces, Math. Ann. **230** (1977), 153-168

[15] T. Shioda, Some remarks on ellitpic curves over function fields, Journees Arithmetiques 1991, Asterisque **209** pp. 99–114 (1991).

[16] K. Ueno, A remark on automorphisms of Kummer surfaces in characteristic p, J. Math. Kyoto Univ. **26** pp. 483-491 (1986).

980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉
東北大学大学院理学研究科数学専攻
e-mail address : hiroito@math.tohoku.ac.jp